CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 1, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i1.53

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Analisis *Rainbow Vertex Connection* pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya

Ida Ariska[1,2], Dafik[1,3], Ika Hesti A.[1,2]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Matematika FKIP Universitas Jember
idaariska37@gmail.com, hestyarin@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Suppose $G = (V(G), E(G))$ is a non-trivial connected graph with edge coloring defined as $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in N$, with the condition that neighboring edges can be the same color. An original path is *rainbow path* if there are no two edges in the path of the same color. The graph G is called rainbow connected if every two vertices in G with rainbow path in G. The coloring here is called rainbow coloring, and the minimal coloring in a graph G rainbow connection number is denoted by $rc(G)$. Suppose $G = (V(G), E(G))$ is a non-trivial connected graph with a vertex coloring defined as $c' : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in N$, with the condition that neighboring interior vertex may have the same color. An original path is rainbow vertex path if there are no two vertices in the path of the same color. The graph G is called rainbow vertex connected if every two vertices in G with rainbow vertex path in G. The G coloring is called rainbow vertex coloring, and the minimal coloring in a G graph is called rainbow vertex connection number which is denoted by $rvc(G)$. This research produces rainbow vertex connection number on the graph resulting from the operation *amal*(Bt_m, v, n), $Wd_{3,m} \square P_n$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} + C_n$, and *shack*(Bt_m, v, n).

Keywords : *Rainbow connection number*, *graph operations*
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan ($V(G)$, $E(G)$), dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v $\in V(G)$ yang disebut sisi. Dari definisi graf G dapat dinyatakan bahwa V tidak boleh kosong, tetapi E boleh kosong. Jadi, apabila terdapat sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja, maka graf tersebut disebut graf trivial [8].
Jarak atau *distance* dinotasikan $d(v_i, v_j)$ yang merupakan jarak antara dua titik v_i dan v_j. Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j. Jika tidak ada lintasan dari titik v_i ke v_j, maka didefinisikan jarak $d(v_i, v_j) = \infty$. Sebagai contoh, dapat dilihat pada Gambar 2.2 $d(v_1, v_5) = 2$. Diameter dari graf G adalah maksimum jarak antara dua vertex v_i dan v_j dalam graf G. Diameter dari graf G dinotasikan dengan *diam*(G), berarti *diam*(G) = *maks*$\{d(v_i, v_j)$: $v_i, v_j \in G\}$.
Salah satu kajian dalam teori graf adalah *rainbow vertex connection*. *Rainbow vertex connection* adalah pemberian warna titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Namun titik yang masuk dalam *rainbow vertex path* tidak boleh ada dua titik atau lebih yang memiliki warna

sama. Pewarnaan di sini disebut *rainbow vertex coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *rainbow vetex connection number* yang dilambangkan dengan $rvc(G)$. Untuk pemberian *rainbow vertex coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya [5].

Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitan ini.

Definisi 1. *Joint dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *adalah graf* G *dimana* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$*, dan dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$ *[4].*

Definisi 2. *Cartesian product dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *dinotasikan dengan* $G = G_1 \square G_2$*, yaitu graf dengan himpunan titik* $V(G_1) \times V(G_2)$*, dua titik* (u_1, u_2) *dan* (v_1, v_2) *di G adjacent jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: (*$u_1 = v_1$ *dan* $u_2v_2 \in E_2$*) atau (*$u_2 = v_2$ *dan* $u_1v_1 \in E_1$*) [4].*

Definisi 3. *Amalgamation dinotasikan dengan Amal*(H_i, v, r)*. Misalkan* $\{H_i\}$ *adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap* H_i *mempunyai suatu titik* v *yang disebut titik terminal, dan* r *menyatakan banyaknya graf* H_i *yang akan diamalgamation, sehingga semua* H_i *dengan seluruh terminalnya direkatkan menjadi satu titik [1].*

Definisi 4. *Shackle dinotasikan dengan Shack (*G_i*,v,r). Misalkan {* G_i *} merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (*G_1*,* G_2*, ...,* G_k*) sedemikian hingga untuk setiap* $1 \leq i, j \leq k$ *dengan* $\mid i - j \mid \geq 2$*,* G_i *dan* G_j *tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap* $1 \leq i \geq k - 1$*,* G_i *dan* $G_i + 1$ *tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana k -1 linkage titik semua berbeda [7].*

Definisi 5. *Crown Product dinotasikan* $G \odot H$*, didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf* G *dan* $|V(G)|$ *duplikat* H_1*,* H_2*, ...,* $H_{|V(G)|}$ *dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di* H_i*, i = 1,2,3,... ,* $|V(G)|$ *[3].*

Terdapat beberapa hasil penelitian *rainbow vertex connection* sebelumnya, seperti [5] pada artikel ilmiah yang telah dipublikasikan pada tahun 2009 penelitiannya *The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*, [6] pada tahun 2011 pada artikel ilmiahnya yang berjudul *Rainbow vertex connection number of 2 connected graphs* mengatakan bahwa menjelaskan *rainbow vertex connection number* dari *cylce graph* C_n. Pada tahun 2015, [2] pada artikel ilmiahnya yang berjudul *The rainbow vertex connection number of Pencil graphs* menjelaskan *rainbow vertex connection number* dari graf pensil *rvc* (Pc_n). Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menemukan *rainbow vertex connection* dari graf hasil operasi *amal*($F_{1,m}$, v, n), $F_{1,m} \square P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $Pm_m + F_{1,n}$, dan *shack*($F_{1,m}$, v, n).

Teorema yang digunakan untuk batas atas dan bawah dari *rainbow connection* adalah sebagai berikut:

Teorema 1. *Misalkan G adalah graf terhubung dengan diam(G), maka rvc(G)* $\geq$ *diam(G) - 1.*

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf hasil operasi *amal*($F_{1,m}$, v, n), $F_{1,m} \square$

P_n, $P_m \odot F_{1,n}$, $Pm_m + F_{1,n}$, dan *shack*$(F_{1,m}, v, n)$.

Teorema yang pertama adalah *rainbow vertex connection number* dari graf G= *amal*$(F_{1,m}$, v, $n)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 2. *Misal G adalah amalgamasi dari graf kipas $F_{1,m}$. Untuk $m \geq 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf amal($F_{1,m}, v, n$) adalah* 1.

Bukti. Berdasarkan observasi **??**, didapatkan $V(amal(F_{1,m}, v, n))$= $\{A\} \cup \{x_i^k; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$, $E(amal(F_{1,m}, v, n)$= $\{Ax_i^k; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n\}$, $|V(amal(F_{1,m}, v, n)| = 1+mn$ dan $|E(amal(F_{1,m}, v, n)| = 2mn-n$. Untuk $m \geq 3$ *amal*$(F_{1,m}, v, n)$ memiliki *diam*$(amal(F_{1,m}, v, n)$ = 2 dan menurut **??** bahwa *rvc*(*G*) $\geq$ *diam* - 1 sehingga *rvc*(*amal*$(F_{1,m}, v, n)) \geq 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *rvc*(*amal*$(F_{1,m}, v, n)) \leq 1$ dengan mengkonstruksi *c'*: *V*(*G*) $\rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ sebagai berikut:

$$c'(v) = \begin{cases} 1, \text{ untuk v} = \text{A} \\ 1, \text{ untuk v} = \text{x}_\text{i}^\text{k}; 1 \leq \text{i} \leq \text{m} \end{cases}$$

Dari fungsi tersebut dapat dilihat bahwa nilai *rvc*(*G*) ≤ 1. Oleh karena *rvc*(*amal*$(F_{1,m}, v, n))$ ≥ 1 dan *rvc*(*amal*$(F_{1,m}, v, n)) \leq 1$, maka *rvc*(*amal*$(F_{1,m}, v, n))$ = 1.

Teorema yang kedua adalah *rainbow vertex connection number* dari graf $F_{1,m} \square P_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3. *Misal G adalah cartesian product dari graf kipas $F_{1,m}$ dan graf lintasan P_n. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow vertex connection dari graf $F_{1,m} \square P_n$ adalah n.*

Bukti. Berdasarkan observasi **??** didapatkan $V(F_{1,m} \square P_n)$= $\{x^j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i^j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, $E(F_{1,m} \square P_n)$= $\{x^j x_i^j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i^j x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i^j x_i^{j+1}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x^j x^{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\}$, $|V(F_{1,m} \square P_n)| = n + mn$ dan $|E(F_{1,m} \square P_n)| = 3mn - m - 1$. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ memiliki *diam*$(F_{1,m} \square P_n)$ = n + 1 dan menurut **??** bahwa *rvc*(*G*) $\geq$ *diam* - 1 sehingga *rvc*$(F_{1,m} \square P_n) \geq n$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *rvc*$(F_{1,m} \square P_n) \leq n$ dengan mengkonstruksi *c'*:*V*(*G*) $\rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ sebagai berikut:

$$c'(v) = \begin{cases} \text{j untuk v} = \text{x}^\text{j}; 1 \leq \text{j} \leq \text{n} \\ \text{j untuk v} = \text{x}_\text{i}^\text{j}; 1 \leq \text{i} \leq \text{m}, 1 \leq \text{j} \leq \text{n} \end{cases}$$

Dari fungsi tersebut dapat ditentukan *rvc*$(F_{1,m} \square P_n) \leq n$. Oleh karena *rvc*$(F_{1,m} \square P_n)$ $\geq n$ dan *rvc*$(F_{1,m} \square P_n) \leq n$, maka *rvc*$(F_{1,m} \square P_n) = n$.

Teorema yang ketiga adalah *rainbow vertex connection number* dari graf G= $P_m \odot F_{1,n}$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4. *Misal G adalah crown product dari graf P_m dan $F_{1,n}$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = P_m \odot F_{1,n}$ adalah m.*

Bukti. Berdasarkan observasi **??** didapatkan $V(P_m \odot F_{1,n})$= $\{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_j^i; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y^i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(P_m \odot F_{1,n})$= $\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\}$ $\cup$ $\{y^i y_j^i; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_j^i y_{j+1}^i; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y^i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i y_j^i; 1 \leq m, 1 \leq j \leq n$, $|V(P_m \odot F_{1,n})|$= $2m + mn$ dan

$|E(P_m \odot F_{1,n})|$ = $m-1+3mn$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ memiliki *diam*($P_m \odot F_{1,n}$) = $m+1$ dan menurut **??** bahwa *rvc*(G) $\geq$ *diam* - 1 sehingga *rvc*($P_m \odot F_{1,n}$) $\geq m+1-1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *rvc*($P_m \odot F_{1,n}$) $\leq m$ dengan mengkonstruksi *c'*:*V*(*G*) $\rightarrow \{1,2,...,k\}$ sebagai berikut:

$$c'(v) = \begin{cases} \mathrm{i\ untuk\ v = x_i; 1 \leq i \leq m} \\ \mathrm{i\ untuk\ v = y^i; 1 \leq i \leq m} \\ \mathrm{i\ untuk\ v = y^i_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \end{cases}$$

Dari fungsi tersebut dapat ditentukan *rvc*($P_m \odot F_{1,n}$) $\leq m$. Oleh karena *rvc*($P_m \odot F_{1,n}$) $\geq m$ dan *rvc*($P_m \odot F_{1,n}$) $\leq m$, maka *rvc*($P_m \odot F_{1,n}$) $= m$.

Teorema yang keempat adalah *rainbow vertex connection number* dari graf $P_m + F_{1,n}$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 5. *Misal G adalah joint dari graf* P_m *dan* $F_{1,n}$. *Untuk* $m \geq 2$ *dan* $n \geq 3$, *rainbow vertex connection number dari graf* $G = P_m + F_{1,n}$ *adalah* 1.

Bukti. Berdasarkan observasi **??** didapatkan $V(P_m + F_{1,n})$= $\{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y\}$ dan $E(P_m + F_{1,n})$= $\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{y y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, $|V(P_m + F_{1,n})|$= $m+n+1$, $|E(P_m + F_{1,n})|$= $2m-2+2n+mn$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ memiliki *diam*($P_m + F_{1,n}$) = 2 dan menurut **??** bahwa *rvc*(G) $\geq$ *diam* - 1 sehingga *rvc*($P_m + F_{1,n}$) $\geq 2-1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *rvc*($P_m + F_{1,n}$) ≤ 1 dengan mengkonstruksi *c'*:*V*(*G*) $\rightarrow \{1,2,...,k\}$ sebagai berikut:

$$c'(v) = \begin{cases} 1,\ \mathrm{untuk} \\ v = x_i; 1 \leq i \leq m \\ 1,\ \mathrm{untuk} \\ v = y_j; 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Dari fungsi tersebut dapat ditentukan *rvc*($P_m + F_{1,n}$) ≤ 1. Oleh karena *rvc*($P_m + F_{1,n}$) ≥ 1 dan *rvc*($P_m + F_{1,n}$) ≤ 1, maka *rvc*($P_m + F_{1,n}$) $= 1$.

Teorema yang kelima adalah *rainbow vertex connection number* dari graf $shack(F_{1,m}, v, n)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 6. *Misal G adalah joint dari graf* $F_{1,m}$ *dan* C_n. *Untuk* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 3$, *rainbow vertex connection number dari graf* $G = F_{1,m} + C_n$ *adalah* 1.

Bukti. Berdasarkan observasi **??** didapatkan $V(F_{1,m} + C_n)$= $\{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(F_{1,m} + C_n)$= $\{x x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_n y_1\} \cup \{x y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, $|V(F_{1,m} + C_n)|$= $1+m+n$, $|E(F_{1,m} + C_n)|$= $2m-1+2n+mn$. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ memiliki *diam*($F_{1,m} + C_n$) = 2 dan menurut **??** bahwa *rvc*(G) $\geq$ *diam* - 1 sehingga *rvc*($F_{1,m} + C_n$) $\geq 2-1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *rvc*($F_{1,m} + C_n$) ≤ 1 dengan mengkonstruksi *c'*:*V*(*G*) $\rightarrow \{1,2,...,k\}$ sebagai berikut:

$$c'(v) = \begin{cases} 1,\ \mathrm{untuk\ v = x_i; 1 \leq i \leq m} \\ 1,\ \mathrm{untuk} \\ v = y_j; 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Dari fungsi tersebut dapat ditentukan $rvc(F_{1,m}+C_n) \leq 1$. Oleh karena $rvc(F_{1,m}+C_n)$ ≥ 1 dan $rvc(F_{1,m}+C_n) \leq 1$, maka $rvc(F_{1,m}+C_n) = 1$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $rvc(amal(F_{1,m}, v, n))$ $= 1$, $rvc(F_{1,m} \square P_n) = n$, $rvc(P_m \odot F_{1,n}) = m$, $rvc(P_m + F_{1,n}) = 1$, dan $rvc(shack(F_{1,m}, v, n))$ $= 2n - 1$.

Referensi

[1] Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The rainbow connection number of special graph. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**(1):457-461.

[2] Chartrand, G., G.L. Jhons, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. Rainbow connection in graphs, *Math. Bohem.*, **133**(2):85-98.

[3] Darmawan, R. N. dan Dafik. 2014. Rainbow connection number of prism and product of two graphs. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika SENDIKMAD UAD*, **1**(1):449-456.

[4] Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan rainbow connection pada graf-graf hasil operasi*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

[5] Harary, F. 2007. Graph theory. New London: Wesley.

[6] Histamedika, G. 2012. *Rainbow connection pada beberapa graf.* Matematika UNAD, 2:17-25.

[7] Li, X. dan Sun, Y. 2012. Rainbow connection of graphs. Tiajin: Springer Science.

[8] Munir, R. 2009. *Matematika diskrit edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

[9] Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

[10] Slamin. 2009. *Desain jaringan: pendekatan teori graf.* Jember: Universitas Jember.

[11] Susanti, B.H., Salman, A.N.M., dan Simanjuntak, R. 2015. Upper bounds for rainbow 2-connectivity of the cartesian product of a path and a cycle. *International Conference on Graph Theory and Information Security*, 74:151-154.

[12] Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow connection number pada operasi graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**(1):521-525.